

Εξέταση Ιουνίου 2020

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Μπορεί να υπάρχουν και δύο σωστές επιλογές.

Ερώτηση 1. Έστω (X, d) ένας μετρικός χώρος και $K \subset X$. Το σύνολο K είναι συμπαγές **αν και μόνο αν:**

- (i) Κάθε βασική ακολουθία του K , συγκλίνει στο K .
- (ii) Κάθε ^{συγκλίνουσα} ακολουθία του K , συγκλίνει στο K .
- (iii) Κάθε ακολουθία του K , έχει συγκλίνουσα υπακολουθία στο K .
- (iv) Κάθε ακολουθία στο K , έχει βασική υπακολουθία.
- (v) Κάθε βασική ακολουθία στο K έχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία.
- (vi) Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία στο K είναι βασική.
- (v) Κανένα από τα παραπάνω.

Ερώτηση 2. Ας είναι δύο μετρικοί χώροι (X, ρ) , (Y, d) και $f: X \rightarrow Y$. Η συνάρτηση f είναι συνεχής **αν και μόνο αν:**

- (i) Για κάθε κλειστό K υποσύνολο Y το $f^{-1}(K)$ είναι κλειστό υποσύνολο του X .
- (ii) Για κάθε ανοιχτό A υποσύνολο X το $f(A)$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του Y .
- (iii) Για κάθε κλειστό K υποσύνολο X το $f(K)$ είναι κλειστό υποσύνολο του Y .
- (iv) Για κάθε συμπαγές F υποσύνολο X το $f(F)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του Y .
- (v) Για κάθε ανοιχτό A υποσύνολο Y το $f^{-1}(A)$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του X .

Ερώτηση 3. Στον \mathbb{R} με την συνήθη μετρική το σύνολο \mathbb{Q} είναι:

- (i) Ανοιχτό.
- (ii) Κλειστό.
- (iii) Φραγμένο.
- (iv) Πλήρες.
- (v) Πυκνό.
- (vi) Συμπαγές.
- (vii) Συνεκτικό.
- (viii) Κανένα από τα παραπάνω.

Ερώτηση 4. Στον \mathbb{R} με τη συνήθη μετρική θεωρούμε το σύνολο $A = (0, 1] \cup \{2\} \cup [3, 4)$. Ποια από τα παρακάτω αληθεύουν;

- (i) Το 0 δεν είναι σημείο επαφής του A .

- (ii) Το 0 δεν είναι σημείο συσσώρευσης του A .
- (iii) Το 2 δεν είναι σημείο επαφής του A .
- (iv) Το 2 δεν είναι σημείο συσσώρευσης του A .
- (v) Το 3 δεν είναι σημείο επαφής τους A .
- (vi) Το 3 δεν είναι σημείο συσσώρευσης του A .

Ερώτηση 5. Έστω (X, d) ένας μετρικός χώρος, A ένα υποσύνολο του X και $y \in X$. Το y είναι σημείο επαφής του A **αν και μόνο αν**:

- (i) Υπάρχει $\varepsilon > 0$ και $a \in A$ ώστε $d(y, a) < \varepsilon$.
- (ii) Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $a \in A$ ώστε $0 < d(y, a) < \varepsilon$.
- (iii) Για κάθε $\varepsilon > 0$ και κάθε $a \in A$ ισχύει $0 < d(y, a) < \varepsilon$.
- (iv) Για κάθε $a \in A$, υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $d(y, a) < \varepsilon$.
- (v) Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $a \in A$ ώστε $d(y, a) < \varepsilon$.

Ερώτηση 6. Στον \mathbb{R} με τη διακριτή μετρική θεωρούμε το σύνολο των ρητών αριθμών \mathbb{Q} . Ποιες από τις παρακάτω είναι αληθείς;

- (i) Το \mathbb{Q} δεν είναι ανοιχτό.
- (ii) Το \mathbb{Q} δεν είναι κλειστό.
- (iii) Το \mathbb{Q} δεν είναι φραγμένο.
- (iv) Το \mathbb{Q} δεν είναι πλήρες.
- (v) Το \mathbb{Q} δεν είναι πυκνό.
- (vi) Το \mathbb{Q} δεν είναι συμπαγές.

Ερώτηση 7. Έστω (X, d) ένας μετρικός χώρος, $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση και a ένα σημείο του X . Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο a **αν και μόνο αν**:

- (i) Για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε $x \in X$ αν $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ τότε $d(x, a) < \delta$.
- (ii) Για κάθε $\varepsilon > 0$ και κάθε $\delta > 0$ ισχύει ότι αν $d(x, a) < \delta$ τότε $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.
- (iii) Για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε $x \in X$ αν $d(x, a) < \delta$ τότε $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.
- (iv) Για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε $x \in X$ αν $|f(x) - f(a)| < \delta$ τότε $d(x, a) < \varepsilon$.
- (v) Για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $d(x, a) < \varepsilon$ τότε $|f(x) - f(a)| < \delta$.

Ερώτηση 8. Έστω ένας μετρικός χώρος (X, d) και A ένα υποσύνολο του X , το οποίο είναι συγχρόνως ανοιχτό και κλειστό στον X . Ποια από τα παρακάτω συμπεραίνουμε με βεβαιότητα;

- (i) Είτε $A = \emptyset$ είτε $A = X$.
- (ii) Ο X είναι συνεκτικός.

- (iii) Ο X είναι μη συνεκτικός.
- (iv) Το σύνορο ∂A είναι το κενό.
- (v) Το A είναι συνεκτικό.
- (vi) Το A είναι μη συνεκτικό.

Ερώτηση 9. Έστω (X, d) ένας μετρικός χώρος. Για $a \in X$ και $\delta > 0$

- (i) η κλειστή μπάλα $\hat{B}_\delta(a, \delta)$ είναι πάντα συμπαγές σύνολο και η ανοιχτή μπάλα $B_\delta(a, \delta)$ είναι ανοιχτό σύνολο.
- (ii) η ανοιχτή μπάλα $B_\delta(a, \delta)$ είναι συνεκτικό σύνολο.
- (iii) κάθε σημείο $x \in S_p(a, \delta)$ ανήκει στο σύνολο $\overline{B}_\delta(a, \delta)$.
- (iv) η κλειστή μπάλα $\hat{B}_\delta(a, \delta)$ είναι πάντα κλειστό σύνολο και περιέχει το σύνολο $\overline{B}_\delta(a, \delta)$.

Ερώτηση 10. Στον \mathbb{R}^2 με την ευκλείδεια μετρική θεωρούμε το σύνολο

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 2, 0 \leq y < 3\}$$

Ποια από τα παρακάτω αληθεύουν;

- (i) Το σημείο $(1, 0)$ δεν είναι εσωτερικό σημείο του A .
- (ii) Το σημείο $(1, 0)$ δεν είναι σημείο επαφής του A .
- (iii) Το σημείο $(1, 0)$ δεν είναι σημείο συσσώρευσης του A .
- (iv) Το σημείο $(1, 3)$ δεν είναι εσωτερικό σημείο του A .
- (v) Το σημείο $(1, 3)$ δεν είναι σημείο επαφής του A .
- (vi) Το σημείο $(1, 3)$ δεν είναι σημείο συσσώρευσης του A .

Ερώτηση 11. Έστω (X, d) ένας μετρικός χώρος και K συμπαγές υποσύνολο του X . Για ποια από τα παρακάτω **δεν** μπορούμε να είμαστε βέβαιοι ότι ισχύει;

- (i) Κάθε βασική ακολουθία του K είναι συγκλίνουσα στο K .
- (ii) Κάθε ακολουθία στο K η οποία συγκλίνει προς ένα στοιχείο $x \in X$, τότε $x \in K$.
- (iii) Κάθε ακολουθία στο K έχει συγκλίνουσα υπακολουθία στο K .
- (iv) Κάθε ακολουθία στο K έχει μια βασική υπακολουθία.
- (v) Κάθε βασική ακολουθία του K έχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία.
- (vi) Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία στο K είναι βασική.
- (vii) Κανένα από τα παραπάνω (δηλ. όλα τα παραπάνω ισχύουν όταν το K είναι συμπαγές).

Ερώτηση 12. Έστω (X, d) ένας μετρικός χώρος, A ένα υποσύνολο του X και $a \in X$. Το a είναι σημείο επαφής του A **αν και μόνο αν**:

- (i) Κάθε συγκλινοσα ακολουθία του A , συγκλίνει στο a .
- (ii) Υπάρχει ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στο A ώστε $x_n \xrightarrow{d} a$.
- (iii) Για κάθε ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στο A η οποία συγκλίνει προς το a οι όροι της περιέχονται στο τελικά στο A .
- (iv) Υπάρχει ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στο $A \setminus \{a\}$ ώστε $x_n \xrightarrow{d} a$.
- (v) Κάθε ακολουθία στο A έχει υπακολουθία η οποία συγκλίνει στο a .

Onlymaths.gr